Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Galaţi

Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XVI-a
Galaţi, 31 octombrie 2015

Clasa a VII-a

Problema 1.

Fie triunghiul ABC, punctele D și E astfel încât $D \in (AB), B \in (DE), [BE] \equiv [AD]$. În semiplanul opus semiplanului determinat de dreapta AB și punctul C se consideră punctul P astfel încât $\measuredangle DEP \equiv \measuredangle BAC$ și $[EP] \equiv [AC]$.

a) Demonstrați că $\Delta DEP \equiv \Delta BAC$;
b) Demonstrați că $[AP] \equiv [EC]$;
c) Demonstrați că segmentele $[PC]$ și $[DB]$ au același mijloc;
d) Dacă patrulaterul CDPB este romb și $[CB] \equiv [DB] \equiv [BE]$, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Problema 2.

Fie $n_1, n_2, ..., n_{2015} \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $\frac{n_1}{1+n_1} = \frac{n_2}{2+n_2} = ... = \frac{n_{2015}}{2015+n_{2015}}$ și $\frac{1}{n_1} + \frac{2}{n_2} + ... + \frac{2015}{n_{2015}} = 403$.

a) Demonstrați că $n_1, n_2, ..., n_{2015} \in \mathbb{N}^*$.
b) Calculați suma $S = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_{2015}$.
c) Calculați suma ultimelor 4031 cifre ale numărului S^{2015}.

Problema 3.

În mulțimea numerelor naturale nenule se consideră ecuația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{n}{[x,y]} = \frac{1}{(x,y)}, n \in \mathbb{N}$.

(unde $[x,y], (x,y)$ reprezintă cel mai mic multiplu comun, respectiv cel mai mare divizor comun al numerelor naturale x și y).

a) Arătați că ecuația are soluții dacă și numai dacă n este impar.
b) Pentru $n = 2013$, găsiți toate soluțiile ecuației de mai sus.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 2 ore 30 minute